環

学習指導要領（3）- 知・技 - イ
学習指導要領（3）- 思・判・表 - イ
学習内容（3）- イ アルゴリズムとプログラム

情報V

空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。

スポーツ大会などで行われるトーナメントについて考える。トーナメント図とは、図1のようにチーム名を一列に並べ、コの字型の線で対戦する2チームを結んだものである。図1の例では、チームAとチームBが試合 M_1 で対戦、チームCとチームDが試合 M_2 で対戦、さらに M_1 の勝者と M_2 の勝者が試合 M_3 で対戦することを表している。チーム名が入る箇所をスロットと呼び、端から順に0から始まる番号を付ける。また、ある試合 M に対して、M まで勝ち上がってくる可能性のあるスロット番号の集合を $P(M)$ とする。図1では $P(M_1) = \{0, 1\}$, $P(M_3) = \{0, 1, 2, 3\}$ である。

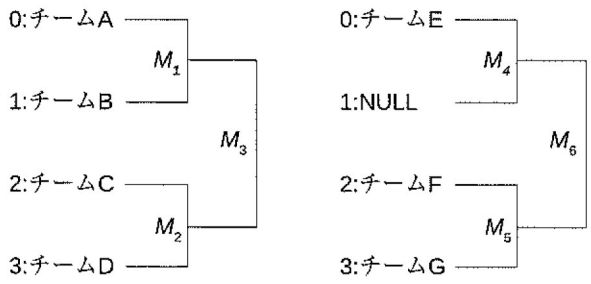

図1　　図2

ここでは、次のようなトーナメント図を作ることにする。

参加チーム数を n とすると、$n = 2^h$ となる整数 h がある場合は、すべてのチームが h 回の試合に勝つと優勝となるようなトーナメント図を作る。なお、対戦を表す線は交差しないように作るものとする。この場合、どの試合においても対戦する2チームは同じ回数の試合に勝っているため、最初の試合が1回戦、1回戦の勝者同士の対戦が2回戦、というように、ある試合が何回戦であるかを不整合なく定義できる。

$n = 2^h$ となる整数 h がない場合は、$2^{g-1} < n < 2^g$ を満たす整数 g に対して $2^g - n$ 個のNULLという仮想的なチームを追加して、チーム数が 2^g のトーナメント図を上で述べたように作る。そして、NULLと対戦する試合を不戦勝と考えることにする。例えば、図2ではチームEの最初の試合が不戦勝となる。なお、NULL同士の対戦がある場合は、その試合の勝者をNULLとして、2回戦以降の対戦でも同様にNULLと対戦するチームを不戦勝とする。

どのスロットにNULLを配置するかについては、トーナメント図のどの部分をとってもなるべく同じ割合でNULLが含まれるようにしたい。これを正確に定義するため、試合 M に対して $f(M)$ を、$P(M)$ の中に配置されるNULLの個数とする。例えば、図2では $f(M_4) = 1$、$f(M_5) = 0$、$f(M_6) = 1$ となる。あるトーナメント図が均等な配置であるとは、2回戦以降の任意の試合 M に対して、M が M' の勝者と M'' の勝者の対戦であるならば、$|f(M') - f(M'')| \leq 1$ が成り立つことであると定義する。

次のアルゴリズムは、チーム数 n が与えられた時に、均等な配置になるようNULLを配置するスロッ

ト番号を出力するアルゴリズムである。均等な配置は複数あり得るが、その中の1つを出力するものとなっている。ただし、$\lceil x \rceil$ は x より大きいか等しい整数のうち最小のもの、$\lfloor x \rfloor$ は x より小さいか等しい整数のうち最大のもの、$x \bmod y$ は x を y で割った余りを表すものとする。

> 変数 n の値を与えられたチーム数とする。
> 変数 g の値を (94)(95) とする。
> 変数 i の値を最初 0 とし、1 ずつ増やしながら $2^g - 1$ まで処理 A を繰り返す。
> 処理 A の始め
> 　変数 a の値を i とする。
> 　変数 b の値を 0 とする。
> 　処理 B を g 回繰り返す。
> 　処理 B の始め
> 　　変数 b の値を $2b + ($(96)(97)$)$ とする。
> 　　変数 a の値を (98)(99) とする。
> 　処理 B の終わり
> 　もし $b <$ (100)(101) なら i の値を出力する。(命令 C)
> 処理 A の終わり

上のアルゴリズムが正しいことは次のようにして証明できる。

まず、$0 \leqq x < 2^g$ である整数 x に対して、x を 2 進法 g 桁（上位の桁が 0 の場合も含む）で表現して各桁の数字を逆順に並べた数を $r_g(x)$ と定義する。つまり、$x = x_{g-1}2^{g-1} + x_{g-2}2^{g-2} + \ldots + x_1 2^1 + x_0 2^0$ だとすると、$r_g(x) = x_0 2^{g-1} + x_1 2^{g-2} + \ldots + x_{g-2}2^1 + x_{g-1}2^0$ である。ただし $x_0, \ldots, x_{g-1}$ は 0 または 1 とする。また、整数の集合 X のすべての要素 x が $0 \leqq x < 2^g$ を満たす時、$r_g(X) = \{r_g(x) \mid x \in X\}$ と定義する。

補題 1: 命令 C を実行する時、$b = r_g(i)$ という関係が成り立っている。

補題 1 の証明：

処理 A の実行を開始する時点での i の値を $i_{g-1}2^{g-1} + i_{g-2}2^{g-2} + \ldots + i_1 2^1 + i_0 2^0$（ただし $i_0, \ldots, i_{g-1}$ は 0 または 1）とする。処理 B の 1 回目の実行を終了した時点では、$a = i_{g-1}2^{g-2} + i_{g-2}2^{g-3} + \ldots + i_1 2^0$ かつ $b =$ (102)(103) となる。2 回目の実行を終了した時点では、$a = i_{g-1}2^{g-3} + i_{g-2}2^{g-4} + \ldots + i_2 2^0$ かつ $b =$ (104)(105) となる。同様に g 回目の実行まで考えると、g 回目の実行を終了した時点では $b = i_0 2^{g-1} + i_1 2^{g-2} + \ldots + i_{g-2}2^1 + i_{g-1}2^0 = r_g(i)$ となる。

補題 2: 整数 $g > 0$ に対して $S = \{s \mid 0 \leqq s < 2^g, s$ は整数$\}$ とすると、$S = r_g(S)$ が成り立つ。

補題 2 の証明：

まず $s' \in r_g(S)$ とする。s' は r_g の定義から 2 進法で表した時に g 桁（上位の桁が 0 の場合も含む）なので $0 \leqq s' < 2^g$ である。したがって $s' \in S$ となるから $S \supseteqq r_g(S)$ である。

次に $s'' \in S$ とする。r_g の定義から $s'' =$ (106)(107) である。上で述べたことから $r_g(s'') \in S$ であるので

環

$s'' \in r_g(S)$ となり、したがって $S \subseteqq r_g(S)$ である。

上記 2 つのことから $S = r_g(S)$ である。

補題 3: スロットが 2^g 個あるトーナメント図と、任意の整数 m $(0 \leqq m \leqq 2^g)$ に対して、$r_g(s) < m$ となるスロット番号 s に NULL を配置すると、均等な配置になる。

補題 3 の証明：

g に関する帰納法で証明する。

$g = 1$ の場合、2 回戦以降の試合がないので明らかに成り立つ。

$g = k - 1$ の場合に成り立つと仮定し、$g = k$ の場合を考える。

まず、k 回戦（決勝戦）が均等な配置の条件を満たすことを示す。対戦するのが M' の勝者と M'' の勝者であり、$P(M') = \{0, 1, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$、$P(M'') = \{2^{k-1}, 2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k - 1\}$ であるとする。2 進法 k 桁で表現すると、$P(M')$ の要素は最上位桁が 0、$P(M'')$ の要素は最上位桁が 1 となる。したがって r_k の定義から $r_k(P(M'))$ の要素は (108)(109)、$r_k(P(M''))$ の要素は (110)(111) となる。補題 2 から $r_k(P(M') \cup P(M''))$ には 0 から $2^k - 1$ までのすべての数が含まれるので、$r_k(s)$ が小さい s から順に NULL を配置していくと $P(M')$ と $P(M'')$ に交互に配置することになる。m が偶数の時は $f(M') = f(M'') =$ (112)(113) となり、m が奇数の時は $f(M') =$ (114)(115), $f(M'') =$ (116)(117) となるので、$|f(M') - f(M'')| \leqq 1$ が成り立つ。

次に、帰納法の仮定を利用するため、全体を $g = k$ のトーナメント図と考えて NULL を配置するスロットが、$P(M')$ と $P(M'')$ をそれぞれ $g = k - 1$ のトーナメント図と考えて NULL を配置するスロットと同じであることを示す。

m が奇数の場合の $P(M')$ の部分をまず考える。$P(M')$ の部分には (114)(115) 個の NULL が配置されるので、集合 $T = \{s \mid 0 \leqq s < 2^{k-1},\ r_k(s) < m\}$ が集合 $T' = \{s \mid 0 \leqq s < 2^{k-1},\ r_{k-1}(s) <$ (114)(115) $\}$ と同じであることを示せばよい。T の要素 s が $0 \leqq s < 2^{k-1}$ ということは、s の 2 進法 k 桁の表現から最上位の 0 を削ると s の 2 進法 $k - 1$ 桁の表現になる。したがって $r_{k-1}(s) =$ (118)(119) であり、$r_k(s) < m$ という条件は $r_{k-1}(s) < \dfrac{m}{2}$ と同値であるが、m が奇数なのでこれは $r_{k-1}(s) <$ (114)(115) とも同値である。ゆえに $T = T'$ となる。

m が偶数の場合の $P(M')$ の部分についても同様である。また、$P(M'')$ の部分については、$g = k - 1$ のトーナメント図と考えた時のスロット番号は 2^{k-1} を引いたものになっていることに注意すれば同様に考えることができる。

したがって帰納法の仮定を利用することができ、$g = k$ の場合に配置した NULL は $P(M')$ と $P(M'')$ の部分でそれぞれ均等な配置になっている。k 回戦が均等な配置の条件を満たすことも最初に示したので、全体として均等な配置になっていることがわかる。

アルゴリズムの証明:

処理 A は、i の値を順に $0, 1, \ldots, 2^g - 2, 2^g - 1$ として繰り返すので、補題 1 から命令 C で出力される数の集合は $\{i \mid 0 \leqq i < 2^g,\ r_g(i) <$ (100)(101) $\}$ となる。補題 3 から、この番号のスロットに NULL を

配置すると、均等な配置になる。

【(94)(95)〜(118)(119) の選択肢】

(11) $\lceil \log_2 n \rceil$　(12) $\lfloor \log_2 n \rfloor$　(13) $\lceil \frac{a}{2} \rceil$　(14) $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor$　(15) $a+b$

(16) $a-b$　(17) $a \bmod 2$　(18) $b \bmod 2$　(19) g　(20) n

(21) 2^g　(22) $2^g - n$　(23) $\frac{m-1}{2}$　(24) $\frac{m}{2}$　(25) $\frac{m+1}{2}$

(26) $i_0 2^0$　(27) $i_0 2^1 + i_1 2^0$　(28) $i_0 2^{g-1}$　(29) $i_0 2^{g-1} + i_1 2^{g-2}$　(30) $2r_k(s)$

(31) $\frac{r_k(s)}{2}$　(32) $r_g(s'')$　(33) $r_g(r_g(s''))$　(34) 奇数　(35) 偶数

(36) 2^{k-1} 未満　(37) 2^{k-1} 以上