3 次の文章を読み，下の問に答えよ。(100 点)

学習指導要領（3）- 思・判・表 - イ
学習内容（3）- イ アルゴリズムとプログラム

有名な公開鍵暗号である RSA 暗号はフェルマーの小定理を利用して設計されている。17 世紀の数学者フェルマーは完全数の研究の中からフェルマーの小定理を発見した。自然数 n は，その全ての正の約数の和が $2n$ に等しいとき，完全数と呼ばれる。6 や 28 は完全数の例である。

$$1+2+3+6=2\times 6$$

$$1+2+4+7+14+28=2\times 28$$

そこで，自然数 n の全ての正の約数の和 $f(n)$ を求めるアルゴリズムについて考えてみよう。簡単なアルゴリズムとしては次のような方法がある。

アルゴリズム A
入力：自然数 n
出力：n の正の約数の和 $f(n)$
① $s \leftarrow 0$, $d \leftarrow 1$
② n を d で割った余りが 0 ならば $s \leftarrow s+d$
③ $d=n$ ならば s を出力し終了。
④ $d \leftarrow d+1$ として ② へ戻る。

ただし，$\leftarrow$ は左辺の変数へ右辺の値を代入することを表すこととする。

問 1　アルゴリズム A の入力が終了するまでに何回の除算が必要であるか答えよ。

問 2　d が n の約数であれば $\frac{n}{d}$ も n の約数であることを利用して，アルゴリズム A を改良するアイデアを述べよ。ただし，平方根を計算する関数 sqrt( ) は使ってよいものとする。

問 3　n を 2 で割れるだけ割って $n=2^k\times m$（m は奇数，$k \geqq 0$）と表したとき，

$$f(n)=(2^{k+1}-1)\times f(m)$$

が成り立つことを説明せよ。

問 4　計算機上では 2 で割る除算は 2 進数のシフト演算で行われるので，その実行時間はほとんど無視してよい。問 2 と問 3 の工夫をアルゴリズム A に加えたとき，必要な除算(2 で割る除算を除く)の回数はおおよそ何回になるか，k，n を用いた式で答えよ。