情報－V

ソーシャル・ネットワークの分野には「六次の隔たり」という言葉がある。これは、友人の友人の友人の…というふうにたどっていくと、世界中のほとんど誰とでも6回程度たどることでつながるという仮説である。

「六次の隔たり」が本当かどうかを調べるために、友人関係のデータが与えられた時に、その中の任意の2人がつながるためには最大何回たどる必要があるかを計算するアルゴリズムを考える。

与えられるデータは、人の集合 G と、すべての $x \in G$ に対して友人の集合 $F(x)$ である。$x, y \in G$ に対して、G の部分集合が x と y の経路であることを次のように定義する。

- $x = y$ の時、$\{x\}$ は x と y の経路である。
- $y \in F(x)$ の時、$\{x, y\}$ は x と y の経路である。
- すべて異なる $z_1, z_2, \cdots, z_n$ があり、$z_1 \in F(x)$ かつ $z_2 \in F(z_1)$ かつ $\cdots$ かつ $z_n \in F(z_{n-1})$ かつ $y \in F(z_n)$ の時、$\{x, z_1, z_2, \cdots, z_n, y\}$ は x と y の経路である。

問題を簡単にするために、このデータは次の性質を持つとする。

- すべての $x \in G$ に対して $x \notin F(x)$。
- すべての $x, y \in G$ に対して、$x \in F(y)$ ならば $y \in F(x)$ 。
- すべての $x, y \in G$ に対して、x と y の経路となる G の部分集合がただひとつ存在する。これを $P(x, y)$ と書く。

x と y の距離 $d(x, y)$ を、$d(x, y) = n(P(x, y)) - 1$ と定義する。ただし、$n(P(x, y))$ は $P(x, y)$ の要素の個数である。

与えられたデータの中の任意の2人がつながるためには最大何回たどる必要があるかは、次のようにして計算できる。

1. $s \in G$ を任意に決める。
2. すべての $x \in G$ に対して $d(s, t) \geqq d(s, x)$ となるように t を選ぶ。(条件 α)
3. すべての $x \in G$ に対して $d(t, u) \geqq d(t, x)$ となるように u を選ぶ。(条件 β)
4. $d(t, u)$ が求める値となる。

学習指導要領（3）- 知・技 - イ
学習指導要領（3）- 思・判・表 - イ
学習内容（3）- イ アルゴリズムとプログラム

(ア) これをコンピュータで計算するための手順は次のようになる。空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回使ってもよい。

[(72)][(73)] から任意の要素 s を取り出し、変数 M の値を $\{s\}$ とする
[(74)][(75)] が成り立つ間、次の処理 A を繰り返す
処理 A の始め
　変数 N の値を [(76)][(77)] にする
　すべての $x \in$ [(78)][(79)] に対して、次の処理 B を繰り返す
　処理 B の始め
　　N の値を [(80)][(81)] にする
　処理 B の終わり
　M の値を [(82)][(83)] にする
処理 A の終わり
[(84)][(85)] から任意の要素 t を取り出し、M の値を $\{t\}$ とする
変数 i の値を [(86)][(87)] とする
[(88)][(89)] が成り立つ間、次の処理 C を繰り返す
処理 C の始め
　すべての $x \in$ [(90)][(91)] に対して、次の処理 D を繰り返す
　処理 D の始め
　　M の値を [(92)][(93)] にする
　処理 D の終わり
　i の値を [(94)][(95)] にする
処理 C の終わり
[(96)][(97)] の値を結果として出力する

(11) G　(12) M　(13) N　(14) $M \subset N$　(15) $N \subset M$
(16) $M = G$　(17) $M \neq G$　(18) $N = G$　(19) $N \neq G$　(20) 空集合
(21) $M \cup N$　(22) $M \cup F(x)$　(23) $N \cup F(x)$　(24) $N \cup F(x) - M$　(25) $M \cup F(x) - N$
(26) i　(27) $i + 1$　(28) $i - 1$　(29) 0

学習指導要領（3）- 知・技 - イ
学習指導要領（3）- 思・判・表 - イ
学習内容（3）- イ アルゴリズムとプログラム

(イ) また、上の計算方法が正しいことは、次のようにして証明できる。空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回使ってもよい。

ある v, w について $d(v,w) > \boxed{(98)}\boxed{(99)}$ と仮定し、矛盾を示す。

もし $d(v,w') > d(v,w)$ となる w' があれば、w' をあらためて w とおくことができるので、すべての $x \in G$ に対して $\boxed{(100)}\boxed{(101)} \geqq d(v,x)$ としてよい。(条件 γ)

まず、$P(s,t)$ と $P(v,w)$ に共通部分があることを示す。

s と w の経路が存在するので、それが s と t の経路と分岐する箇所を a、v と w の経路と分岐する箇所を b とする。

$\boxed{(102)}$ より

$$\boxed{(103)}\boxed{(104)} = d(s,a) + \boxed{(105)}\boxed{(106)} \geqq \boxed{(107)}\boxed{(108)} = \boxed{(109)}\boxed{(110)} + d(a,b) + d(b,w)$$

となる。同様に $\boxed{(111)}$ より

$$\boxed{(112)}\boxed{(113)} = d(v,b) + \boxed{(114)}\boxed{(115)} \geqq \boxed{(116)}\boxed{(117)} = \boxed{(118)}\boxed{(119)} + d(a,b) + d(a,t)$$

となる。この 2 つの式の不等号の両辺を足して整理すると $0 \geqq \boxed{(120)}\boxed{(121)}$ となるが、距離は負にならないので $\boxed{(120)}\boxed{(121)} = 0$ となり、$P(s,t)$ と $P(v,w)$ には共通部分が存在することがわかる。

$c \in P(s,t) \cap P(v,w)$ とする。c は $P(s,v)$ か $P(s,w)$ のどちらかに含まれるが、$P(s,v)$ に含まれる場合は v と w を交換して考えることができるので、$c \in P(s,w)$ としてよい。

$\boxed{(122)}$ より

$$\boxed{(123)}\boxed{(124)} = d(s,c) + \boxed{(125)}\boxed{(126)} \geqq \boxed{(127)}\boxed{(128)} = d(s,c) + \boxed{(129)}\boxed{(130)}$$

であるから $\boxed{(125)}\boxed{(126)} \geqq \boxed{(129)}\boxed{(130)}$ となる。同様に $\boxed{(131)}$ より

$$\boxed{(132)}\boxed{(133)} = d(v,c) + \boxed{(129)}\boxed{(130)} \geqq \boxed{(134)}\boxed{(135)} = d(v,c) + \boxed{(125)}\boxed{(126)}$$

であるから $\boxed{(129)}\boxed{(130)} \geqq \boxed{(125)}\boxed{(126)}$ となる。この 2 つの式から $\boxed{(125)}\boxed{(126)} = \boxed{(129)}\boxed{(130)}$ となる。

$\boxed{(136)}$ より

$$\boxed{(137)}\boxed{(138)} \geqq \boxed{(139)}\boxed{(140)} = d(v,c) + \boxed{(125)}\boxed{(126)} = d(v,c) + \boxed{(129)}\boxed{(130)} = \boxed{(141)}\boxed{(142)}$$

となる。これは最初の仮定に反するので、証明された。

【(102), (111), (122), (131), (136) の選択肢】

(1) 条件 α　(2) 条件 β　(3) 条件 γ

【上記以外の解答欄の選択肢】

(11) $d(a,b)$　(12) $d(a,s)$　(13) $d(a,t)$　(14) $d(a,u)$　(15) $d(a,v)$

(16) $d(a,w)$　(17) $d(b,s)$　(18) $d(b,t)$　(19) $d(b,u)$　(20) $d(b,v)$

(21) $d(b,w)$　(22) $d(c,s)$　(23) $d(c,t)$　(24) $d(c,u)$　(25) $d(c,v)$

(26) $d(c,w)$　(27) $d(s,t)$　(28) $d(s,u)$　(29) $d(s,v)$　(30) $d(s,w)$

(31) $d(t,u)$　(32) $d(t,v)$　(33) $d(t,w)$　(34) $d(u,v)$　(35) $d(u,w)$

(36) $d(v,w)$