環

情報－V

5 以下の素因数しか持たない整数、つまり $2^a3^b5^c$ (ただし a, b, c は 0 以上の整数) の形で表せる数をハミング数と呼ぶ。ハミング数を小さい順に 10000 個求めたい。

学習指導要領（3）－知・技－ウ
学習指導要領（3）－思・判・表－ウ
学習内容（3）－ウ モデル化とシミュレーション

(ア) 空欄 (65)(66) にあてはまるもっとも適切な数字をマークしなさい。

単純に考えれば、1, 2, 3, ⋯ と順に素因数分解して $2^a3^b5^c$ の形で表せるかどうかを調べていき、10000 個見つかるまで繰り返せばよい。しかし 10000 番目のハミング数は 288325195312500000 とかなり大きいので、計算に時間がかかる。もっと速く計算するため、次のような手順を考える。

1. 小さい順に何個かのハミング数が既に見つかっているとする。例えば最初の 4 個は 1, 2, 3, 4 である。それを表の 1 行目に書き、それを 2 倍したもの、3 倍したもの、5 倍したものを、それぞれ 2 行目、3 行目、4 行目に書く。2〜4 行目の中で既に見つかっているものには斜線を引く。

1	2	3	4						
~~2~~	~~4~~	6	8						
~~3~~	6	9	12						
5	10	15	20						

2. 2〜4 行目で斜線が引かれていない最小の数を探すと、4 行目の 5 である。それに斜線を引き、1 行目の空いている欄に 5、その下の欄には 5 を 2 倍、3 倍、5 倍した数を書き加える。
3. 同じ手順をもう一度繰り返すと、今度は 2 行目と 3 行目の 6 が最小の数になる。両方の 6 に斜線を引いて、1 行目の空いている欄に 6、その下の欄には 6 を 2 倍、3 倍、5 倍した数を書き加える。

1	2	3	4	5	6				
~~2~~	~~4~~	~~6~~	8	10	12				
~~3~~	~~6~~	9	12	15	18				
~~5~~	10	15	20	25	30				

4. これを繰り返すと、1 行目にハミング数が小さい順に並ぶ。20 番目のハミング数は (65)(66) である。

環

（イ）（ウ）{学習指導要領（3）- 知・技 - イ
学習指導要領（3）- 思・判・表 - イ
学習内容（3）- イ アルゴリズムとプログラム}

(イ) 空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。

上の手順をアルゴリズムの形で書くと次のようになる。

```
変数 p, 変数 q, 変数 r, 変数 h_1, 変数 n の値をすべて 1 とする
n ≦ 10000 が成り立っている間は処理 A を繰り返す
処理 A の始め
    n の値を 1 増やす
    変数 h_n の値を 2h_p, 3h_q, 5h_r の中で最小のものとする（命令 B）
    もし（条件 D）ならば p の値を 1 増やす（命令 C）
    もし（条件 E）ならば q の値を 1 増やす
    もし（条件 F）ならば r の値を 1 増やす
処理 A の終わり
結果として h_1, h_2, ··· , h_10000 の値を出力する
```

条件 D, 条件 E, 条件 F に当てはまる式の組み合わせとしてもっとも適当なものを下の選択肢から選び、その番号を $\boxed{(67)}$ にマークしなさい。

【$\boxed{(67)}$ の選択肢】

(1) 条件 D: $h_n = 2h_p$, 条件 E: $h_n = 3h_q$, 条件 F: $h_n = 5h_r$

(2) 条件 D: $2h_n = h_p$, 条件 E: $3h_n = h_q$, 条件 F: $5h_n = h_r$

(3) 条件 D: $h_n = h_{p+1}$, 条件 E: $h_n = h_{q+1}$, 条件 F: $h_n = h_{r+1}$

(4) 条件 D: $h_n = h_{p-1}$, 条件 E: $h_n = h_{q-1}$, 条件 F: $h_n = h_{r-1}$

(ウ) 空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。

上のアルゴリズムが正しいことは次のようにして証明できる。

まず、$h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ の値がすべてハミング数であることは、命令 B における h_n の計算方法から明らか。

次に、$h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ が小さい順に 10000 個のハミング数であることを示す。そのため、h_{10000} より小さくて $h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ に含まれないハミング数があると仮定し、その中で最も小さいものを h' とする。$h_1 = 1$ であるので、$\boxed{(68)}\boxed{(69)}$ である。h' はハミング数であるから $h' = 2^i3^j5^k$ と書ける。$\boxed{(68)}\boxed{(69)}$ であるから $i > 0$ または $j > 0$ または $k > 0$ である。以下では $i > 0$ の場合について証明する。$j > 0$, $k > 0$ の場合も同様に証明できる。

$h'' = \boxed{(70)}\boxed{(71)}$ とすると、h'' はハミング数であり、$h'' < h'$ である。h' は $h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ に含まれない最小のハミング数であったから $h'' = h_s$ となる s が存在する。アルゴリズム終了時の変数 p の値を p' として、p' と s の大小によって次の 2 つの場合に分ける。

$p' > s$ の場合：p の値は 1 ずつしか増えていかないので、繰り返し中に p の値が s で命令 C が実行さ

れたことがあるはずである。すると、その時点での h_n の値は $2h_p = 2h_s = \boxed{(72)}\boxed{(73)} = h'$ であるから、h' が $h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ に含まれないという仮定に反する (α)。

$p' \leqq s$ の場合：10000 回目の処理 A の実行を考える。命令 B で $2h_p$ が最小となった場合は、命令 C で p が 1 増えるので、$h_{10000} = \boxed{(74)}\boxed{(75)}$ となり、$\boxed{(74)}\boxed{(75)} < 2h_{p'} \leqq 2h_s = \boxed{(72)}\boxed{(73)} = h'$ であるから $h_{10000} < h'$ となる。また、命令 B で $2h_p$ が最小でなかった場合は、$h_{10000} < \boxed{(76)}\boxed{(77)}$ であるから同様に $h_{10000} < h'$ となる。いずれにせよ h' が h_{10000} より小さいという仮定に反する (β)。

α, β より h_{10000} より小さくて $h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ に含まれないハミング数があるという仮定が間違っていたことがわかるので、$h_1, h_2, \cdots, h_{10000}$ は小さい順に 10000 個のハミング数である。

【$\boxed{(68)}\boxed{(69)}$〜$\boxed{(76)}\boxed{(77)}$の選択肢】

(11) $h' > 1$ (12) $h' = 1$ (13) $h' = h_1$ (14) $2^{i+1}3^j5^k$ (15) $2^{i-1}3^j5^k$

(16) $2h'$ (17) $2h''$ (18) $2h_{10000}$ (19) $2h_{p'}$ (20) $2h_{p'-1}$

(21) $2h_{p'+1}$