情報V

互いに異なる n 個の数が与えられている。ただし $n \geqq 2$ である。以後、「順列」とは、与えられた数を並べ替えた数列を意味するものとする。

順列 P, Q に対して、辞書順で P が Q より前に来ることを $P < Q$ と書くことにする。ただし辞書順とは、2つの順列 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ と $q_1, q_2, \ldots, q_n$ の順序を決める際、まず p_1 と q_1 を比較し、もし $p_1 = q_1$ なら p_2 と q_2 を比較し、もし $p_2 = q_2$ なら p_3 と q_3 を比較し、と順に比較していって、最初に異なる数が出てきた時に小さい方の順列を前にするという方式である。例えば、1,5,8,4 が与えられている場合は $(1,4,5,8) < (1,4,8,5) < (1,5,4,8) < (1,5,8,4) < (1,8,4,5) < \cdots < (8,5,1,4) < (8,5,4,1)$ となる。

学習指導要領（3）- 知・技 - イ
学習指導要領（3）- 思・判・表 - イ
学習指導要領（3）- 思・判・表 - ウ
学習内容（3）- イ アルゴリズムとプログラム

(ア) 順列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して、辞書順でそのすぐ後に来る順列を求める（例えば、上の例で 1,5,8,4 に対して 1,8,4,5 と答える）には、次のようにすればよいことが知られている。

1. 順列の末尾を含む、降順に並んでいる部分を R とする（1,5,8,4 が与えられた時は 8,4 の部分）。もし、それが順列全体なら、この順列が辞書順で最後である。
2. R のすぐ左の数を x とする（1,5,8,4 が与えられた時は 5)。
3. 順列の末尾から順に探して初めて現れる x より大きい数を y とする（1,5,8,4 が与えられた時は 8)。
4. x と y を入れ替える。
5. 入れ替えた後の R を逆順に並べ替える（1,5,8,4 が与えられた時は、上の入れ替えで 1,8,5,4 になり、R の位置にある 5,4 を逆順にして 1,8,4,5)。

この手順をアルゴリズムの形で書くと次のようになる。空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。

変数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の値は、入力された順列とする
変数 i の値を n にする
条件 $\boxed{(86)}$ が成り立つ間、次の処理 A を繰り返す
処理 A の始め
　i の値を 1 減らす
　もし $i = 1$ ならば、「辞書順で最後です」と出力してアルゴリズムを終了する
処理 A の終わり
変数 j の値を n にする
条件 $\boxed{(87)}$ が成り立つ間、次の処理 B を繰り返す
処理 B の始め
　j の値を 1 減らす
処理 B の終わり
a_{i-1} と a_j の値を交換する
j の値を n にする
条件 $\boxed{(88)}$ が成り立つ間、次の処理 C を繰り返す
処理 C の始め
　a_i と a_j の値を交換する
　i の値を 1 増やす
　j の値を 1 減らす
処理 C の終わり
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の値を出力する

【$\boxed{(86)}$〜$\boxed{(88)}$ の選択肢】

(1) $a_i \geqq 1$　(2) $a_{i-1} \geqq 1$　(3) $a_{i-1} \geqq a_i$
(4) $a_j \geqq a_i$　(5) $a_j \leqq a_{i-1}$　(6) $a_j \leqq a_n$
(7) $i > 1$　(8) $j > 1$　(9) $i < j$

(イ) 上のアルゴリズムが正しいことの証明は次のようにしてできる。空欄に入るもっとも適切なものを下の選択肢から選び、その番号をマークしなさい。

補題: 互いに異なる m 個の数が与えられた時、辞書順で最初の順列は与えられた数を昇順に並び替えたもの、最後の順列は降順に並び替えたものである。

補題の証明: 昇順に並び替えたものを $b_1, \ldots, b_m$ とする。これより辞書順で先に来る順列があると仮定し、それを $c_1, \ldots, c_m$ とする。辞書順の定義から、ある i があって、すべての $j < i$ について $b_j = \boxed{(89)}\boxed{(90)}$ 、$b_i > c_i$ となる。

- $i = 1$ の場合、$b_1, b_2, \ldots, b_m$ は昇順に並んでいるから、$b_1 > c_1$ は順列が与えられた数を並べ替えたものという仮定に反する。
- $i > 1$ の場合、順列は与えられた数を並べ替えたものであり、$b_1, b_2, \ldots, b_m$ は昇順に並んでいるから、$b_i > c_i$ ということは、ある $k < i$ について $c_i = b_k$ が成り立つ。ところが、すべての $j < i$ について $b_j = \boxed{(89)}\boxed{(90)}$ なので、$c_i = b_k = \boxed{(91)}\boxed{(92)}$ となる。これは与えられた数が互いに異なるという仮定に反する。

したがって、そのような $c_1, \ldots, c_m$ は存在せず、$b_1, b_2, \ldots, b_m$ は辞書順で最初である。降順に並び替えたものも同様に証明できる。

アルゴリズムの証明: a_n を含んで降順に並んでいる部分を $a_i, \ldots, a_n$ とする。もし $i = 1$ ならば、補題よりこれが辞書順で最後である。以後は $i > 1$ とする。

$a_i, \ldots, a_n$ が降順で、$a_{i-1}, \ldots, a_n$ は降順にならないことから $a_{i-1} < a_i$ となる。したがって $a_i, \ldots, a_n$ の中に必ず a_{i-1} より大きい数が存在する。その中で最も右にあるものを a_j とする。

辞書順で A の次の順列を $B = (b_1, \ldots, b_n)$ とする。また、順列 $C = (c_i, \ldots, c_n)$ を、すべての $k \leqq i-2$ に対して $c_k = a_k$ 、$c_{i-1} = a_j$ である適当な順列とする。$a_{i-1} < a_j = c_{i-1}$ であるから、辞書順の定義より $A < C$ となる。

まず、すべての $k \leqq i-2$ に対して $b_k = a_k$ であることを示す。そうでないと仮定して、$b_k \neq a_k$ となる k の中で最小のものを k' とする。$A < B$ であるから、$a_{k'} < b_{k'}$ となる。ところが、$k' \leqq i-2$ かつ $\boxed{(93)}\boxed{(94)} = a_{k'} < b_{k'}$ なので $C < B$ 、したがって $A < C < B$ となり、B が辞書順で A の次の順列という仮定に反する。

次に、$b_{i-1} = a_j$ であることを示す。そうでないと仮定して、b_{i-1} が $a_1, \ldots, a_n$ のどれと等しいかによって場合分けする。

- ある $k \leqq i-2$ に対して $b_{i-1} = a_k$ と仮定する。$a_k = \boxed{(95)}\boxed{(96)}$ なので $\boxed{(95)}\boxed{(96)} = b_{i-1}$ となり、与えられた数がすべて異なるという仮定に反する。
- $b_{i-1} = a_{i-1}$ と仮定する。すべての $k \leqq \boxed{(97)}\boxed{(98)}$ に対して $a_k = b_k$ となるから、$A < B$ であるためには $(a_i, \ldots, a_n) < (b_i, \ldots, b_n)$ でなければならない。ところが $a_i, \ldots, a_n$ は降順であるから補題

よりそのような $b_i, \ldots, b_n$ は存在しない。

- ある k があって $i \leqq k \leqq j-1$ かつ $b_{i-1} = a_k$ と仮定する。$a_i, \ldots, a_n$ は降順であるから $a_k > a_j$ となる。すると $\boxed{(99)}\boxed{(100)} = a_j < a_k = b_{i-1}$ であるから $C < B$ 、したがって $A < C < B$ となり、B が辞書順で A の次の順列という仮定に反する。
- ある k があって $\boxed{(101)}\boxed{(102)} \leqq k \leqq n$ かつ $b_{i-1} = a_k$ と仮定する。a_j の選び方と、$a_i, \ldots, a_n$ が降順であることから $a_{i-1} > a_k$ となる。すると $a_{i-1} > a_k = b_{i-1}$ となり、$A < B$ という仮定に反する。

上の 4 つの場合はすべて仮定に反するので、$b_{i-1} = a_j$ であることがわかる。

B の残りの部分 $b_i, \ldots, b_n$ は、$a_{i-1}, \ldots, a_n$ から a_j を除いた数を並べ替えたものである。その中で辞書順で最も前に来るのは、補題より昇順に並んでいる場合である。$a_i, \ldots, a_n$ は降順であり、a_j の選び方から、a_j の代わりに a_{i-1} を入れた $a_i, \ldots, a_{j-1}, a_{i-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ も降順となり、それを逆にした $a_n, \ldots, a_{j+1}, a_{i-1}, a_{j-1}, \ldots, a_i$ が昇順となるので、これが $b_i, \ldots, b_n$ と一致する。

以上のことから $B = (a_1, \ldots, a_{i-2}, a_j, a_n, \ldots, a_{j+1}, a_{i-1}, a_{j-1}, \ldots, a_i)$ となるが、これはアルゴリズムの出力に他ならない。

【$\boxed{(89)}\boxed{(90)}$～$\boxed{(101)}\boxed{(102)}$ の選択肢】

(11) b_i	(12) b_{i-1}	(13) b_j	(14) b_k	(15) $b_{k'}$
(16) c_i	(17) c_{i-1}	(18) c_j	(19) c_k	(20) $c_{k'}$
(21) $i-1$	(22) i	(23) $i+1$		
(24) $j-1$	(25) j	(26) $j+1$		